



Universidad Nacional
de Mar del Plata

*Departamento de Ingeniería
Eléctrica*

Área Electrotecnia



Electrotecnia

(para la Carrera Ingeniería Mecánica)

**COMPORTAMIENTO OHMICO DE LOS CIRCUITOS
ELÉCTRICOS**

Profesor Adjunto: Ingeniero Electricista y Laboral Gustavo L. Ferro
Mail: gferro@fi.mdp.edu.ar
EDICION 2016

INDICE

Capítulo 3

COMPORTAMIENTO OHMICO DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

3.1 ELEMENTOS DE CIRCUITOS ELECTRICOS.

3.2 TERMINOLOGIA DE USO COMUN EN ELECTROTECNIA.

3.3 TIPOS MÁS COMUNES DE SEÑALES.

3.3.1. EXCITACIÓN CONTINUA.

3.3.2. EXCITACIÓN ALTERNA SINUSOIDAL

3.3.3. EXCITACIÓN CONTINUA PULSANTE.

3.3.4. EXCITACIÓN ALTERNA POLIARMONICA.

3.3.5. EXCITACIÓN IMPULSO O PULSO.

3.3.6. EXCITACIÓN DIENTE DE SIERRA O RAMPA.

3.4 ELEMENTOS ACTIVOS DE LOS CIRCUITOS.

3.4.1. FUENTE DE TENSIÓN PERFECTA.

3.4.2. FUENTE DE TENSION REAL.

3.5 ELEMENTOS PASIVOS DE LOS CIRCUITOS.

3.5.1. RESISTORES PUROS.

3.5.2. INDUCTORES PUROS.

3.5.3. CAPACITORES PUROS.

3.6. AGRUPAMIENTO DE ELEMENTOS.

3.6.1. AGRUPAMIENTO DE ELEMENTOS ACTIVOS

3.6.1. 1. AGRUPAMIENTO EN SERIE.

3.6.1. 1. AGRUPAMIENTO EN PARALELO.

3.6.2. AGRUPAMIENTO DE ELEMENTOS PASIVOS.

3.6.2.1. AGRUPAMIENTO EN SERIE.

3.6.2.2. AGRUPAMIENTO EN PARALELO.

3.6.2.3. AGRUPAMIENTO EN ESTRELLA Y EN TRIANGULO.

➤ BIBLIOGRAFIA RECOMENTADA:

- Ingeniería de energía eléctrica. Libro 1. Circuitos.
- Autor: Marcelo Sobrevila.
- Capítulo 1.1

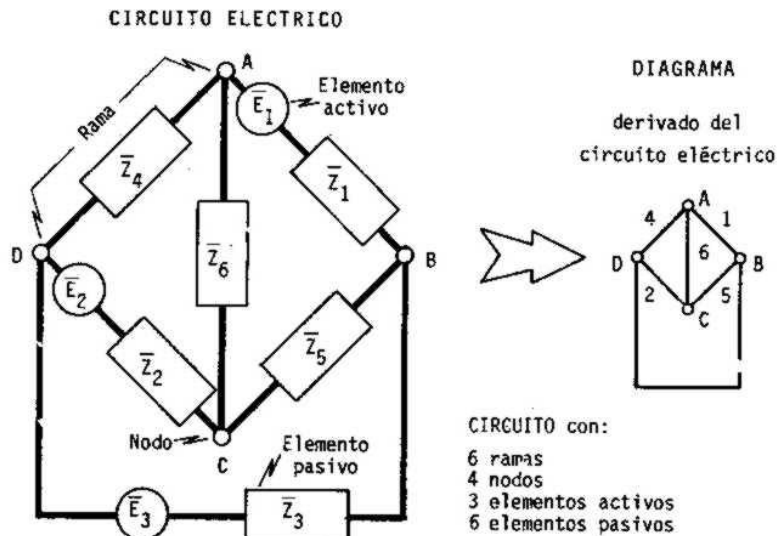
3.1. ELEMENTOS DE CIRCUITOS ELECTRICOS

Comencemos por preguntarnos ¿Que entendemos por un circuito eléctrico?, aceptando como una definición elemental la siguiente:

- **CIRCUITO ELECTRICO** es un conjunto de elementos apropiados que, estando vinculados eléctricamente entre sí, permiten controlar una cierta cantidad de energía.

En la figura y a título de ejemplo puede verse un circuito, indicando en el mismo los componentes más corrientes a la que nos hemos de referir en este curso.

En la parte derecha de la figura, aparece el "diagrama", que es un dibujo simplificado del circuito eléctrico, y que se utiliza cuando este es muy complicado y es necesario hacerlo más comprensible.



¿Qué elementos podemos encontrar en un circuito eléctrico?

En todo circuito eléctrico podemos encontrar dos tipos fundamentales de elementos a saber:

- **ELEMENTOS ACTIVOS:** es todo aquel que aporta energía. Un acumulador, una pila, un alternador son ejemplos de fuentes o elementos activos. Si bien todos los elementos activos tienen como cualidad característica la fuerza electromotriz, los clasificaremos en **fuentes de tensión y fuentes de corriente**, las cuales podrán ser perfectas o ideales y reales.
- **ELEMENTOS PASIVOS:** son los componentes de un circuito que en vez de aportar energía como las fuentes, las sustraen. Entre los elementos pasivos encontramos: el resistor, el inductor y el capacitor.

¿Qué terminología asociada a los circuitos eléctricos encontramos?

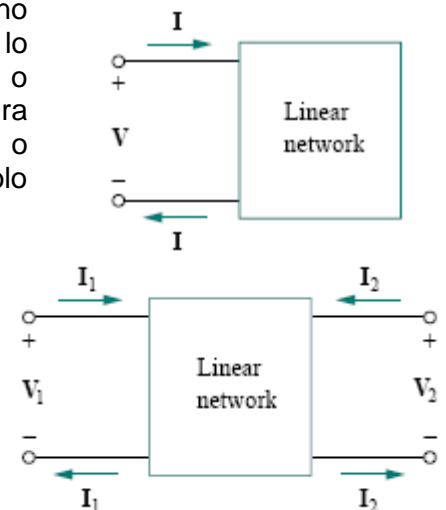
Dado un circuito eléctrico cualquiera, como por ejemplo el de la figura anterior, podemos definir.

- **RAMAS:** se entiende por rama a un tramo sin derivaciones entre dos nodos.
- **NODOS:** es el empalme o lugar de encuentro de tres o más ramas.
- **LAZOS O MALLAS:** son conjuntos de ramas que constituyen recorridos o circuitos cerrados.

¿Qué tipos fundamentales de circuitos podemos encontrar?

Podemos agrupar a los circuitos en dos tipos fundamentales:

- **DIPOLO:** Tiene solo dos terminales disponibles no importando la cantidad de elementos internos que lo compongan, ni la forma en que estén conectados o vinculados entre sí. Se indican como una caja negra dentro de la cual puede haber resistores, inductores o capacitores en número variado. Lo que importa del dipolo es su comportamiento visto desde sus dos terminales.
- **CUADRIPOLO:** Tiene cuatro terminales disponibles, dos de ellos constituyen la entrada y los restantes la salida. Entre estos cuatro terminales también puede haber cualquier cantidad de resistores, inductores o capacitores, en la forma en que se que se quiera. Lo que interesa en el estudio del cuadripolo es la forma en que se comporta el conjunto visto desde sus terminales.



Según lo definimos anteriormente no hemos dicho que en el interior de dipolos y cuadripolos puedan existir fuentes, lo que hemos definido realmente son los **DIPOLOS PASIVOS O CUADRIPOLOS PASIVOS**. Los hay también **ACTIVOS**, es decir, conteniendo en su interior fuentes.

3.2. TERMINOLOGIA DE USO COMÚN EN ELECTROTECNIA

A continuación vamos a definir ciertas expresiones que son muy corrientes en la Electrotecnia, a saber:

- **EXCITACIÓN:** es un aporte de energía que ingresa a un circuito por intermedio de un elemento activo.
- **SEÑAL:** es la forma en que se manifiesta una excitación. Puede ser una fuerza electromotriz, una tensión o una corriente.
- **RESPUESTA:** es cualquiera de los muchos fenómenos que ocurren a causa de una excitación o un conjunto de excitaciones.
- **CORRIENTE:** es una forma particular de respuesta, consistente en una circulación de electrones. Toda corriente está asociada a una cantidad de energía que se transforma o acumula en los elementos pasivos, y que da lugar a tensiones en las ramas, o a potenciales en los nodos.
- **REGIMEN PERMANENTE:** es un tipo de excitación que existe un tiempo suficientemente largo, como para dar tiempo a que la respuesta alcance un comportamiento análogo.
- **REGIMEN TRANSITORIO:** es un tipo de excitación que se presenta cuando se pasa de un régimen permanente a otro, en un tiempo muy breve, dando lugar a una respuesta transitoria, antes de adoptar la configuración permanente correspondiente al segundo régimen. La respuesta transitoria suele tener una configuración que no es semejante a la excitación.

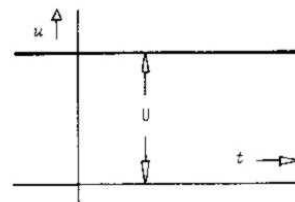
3.3. TIPOS MÁS COMUNES DE SEÑALES

En la Ingeniería Eléctrica se han destacado varios tipos de señales, por la frecuencia con que se presentan en los aparatos y sistemas de uso práctico. Haremos a continuación una breve descripción de las mismas, recurriendo a la función: $u = u(t)$

3.3.1. EXCITACIÓN CONTINUA

Es la que se presenta en los terminales de pilas y generadores electroquímicos, o en fuentes de tensión estabilizadas que se emplean en Electrónica.

La tensión es prácticamente invariable con el tiempo, conforme a la expresión: $u = U = \text{constante}$. Su representación puede verse en la figura.



3.3.2. EXCITACIÓN ALTERNA SINUSOIDAL

Es el tipo de excitación que presentan las redes de distribución de energía eléctrica, conocidas como de "corriente alterna".

La tensión en función del tiempo es:

$$u = \sqrt{2} U \text{ sen } (wt - \varphi_0)$$

Donde tenemos:

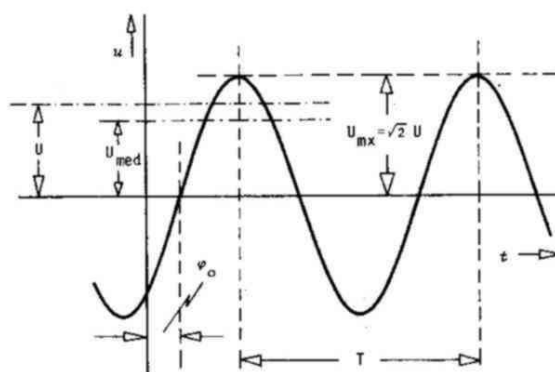
u = valor instantáneo de la tensión

U = valor eficaz de la tensión

w = pulsación del fenómeno vibratorio ($w = 2\pi/T = 2\pi f$, donde T = período de la oscilación y f = frecuencia = $1/T$)

t = tiempo (variable independiente)

φ_0 = desfase con relación al origen de tiempos.



El valor eficaz es: $U = \sqrt{1/T \int_0^T u^2 dt} = U_{\text{máximo}}/\sqrt{2}$

El valor medio de la función para un semiperíodo, vale: $U_{\text{medio}} = 2/\pi U_{\text{máximo}}$

El valor $U_{\text{máximo}}$ es el valor máximo de la función, que muchas veces se lo denomina valor de cresta o valor pico.

3.3.3. EXCITACIÓN ALTERNA POLIARMÓNICA

Los generadores de corriente alterna, que son los de uso más frecuente, producen excitaciones alternas poliarmónicas. Las ondas que tienen la propiedad de repetir sus valores a intervalos regulares, llamados períodos, pueden ser descompuestas en una serie de ondas sinusoidales perfectas.

Según estudios efectuados por Fourier, una función periódica puede ser representada por medio de una serie de la forma:

$$u = U_0 + (\sqrt{2}U_1) \text{ sen } (wt - \theta_1) + (\sqrt{2}U_2) \text{ sen } (2wt - \theta_2) + (\sqrt{2}U_3) \text{ sen } (3wt - \theta_3) + \dots + (\sqrt{2}U_n) \text{ sen } (nwt - \theta_n)$$

En resumen, la expresión de una excitación poliarmónica resulta de la suma de un término constante U_0 llamado "componente de corriente continua", más una serie de

sinusoides perfectas llamadas armónicas. En la expresión anterior cada término resulta:

u = valor instantáneo de la poliarmónica

U_0 = componente de corriente continua

U_1 = valor eficaz de la primera armónica

U_2 = valor eficaz de la segunda armónica, y así sucesivamente.

θ_1 = desfase con relación al origen de tiempos de la primera armónica.

θ_2 = desfase con relación al origen de tiempos de la segunda armónica, y así sucesivamente

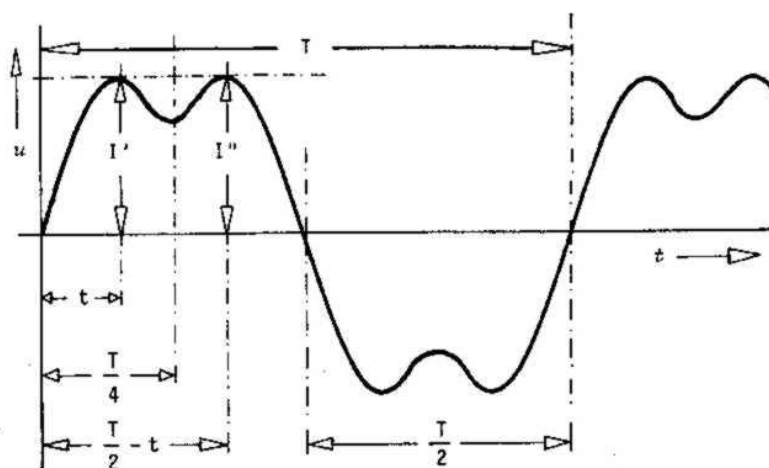
w = pulsación de la primera armónica

$2w$ = pulsación de la segunda armónica, y así sucesivamente

t = tiempo (variable independiente)

Las señales poliarmónicas utilizadas por la técnica tienen, por lo regular, lo que se suele llamar **simetría de cuarto de período** (ver figura), por lo que la expresión de una tensión poliarmónica resulta:

$$u = \sqrt{2}U_1 \text{ sen}(wt - \theta_1) + \sqrt{2} U_3 \text{ sen}(3wt - \theta_3) + \sqrt{2} U_5 \text{ sen}(5wt - \theta_5) + \sqrt{2} U_7 \text{ sen}(7wt - \theta_7) + \dots$$



3.3.4. EXCITACIÓN DE CONEXIÓN O ESCALON

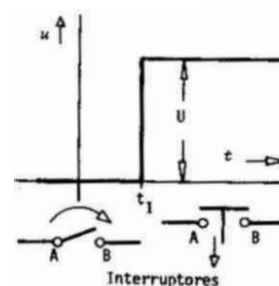
Cuando un interruptor como el indicado en la figura lo cerramos, establecemos una continuidad eléctrica entre dos partes de un circuito.

A esta forma de excitación que cambia bruscamente se la llama "escalón"

El escalón se puede expresar de la siguiente manera:

$$u = u(t) = 0 \text{ para } t \leq 0$$

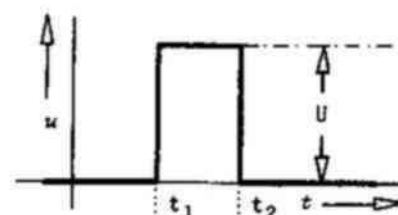
$$u = u(t) = U \text{ para } t > t_1$$



3.3.5. EXCITACIÓN IMPULSO O PULSO

Cuando un interruptor como el de la figura anterior, y después de un cierto tiempo no muy largo, se lo abre, producimos lo que se conoce como un "pulso o impulso". En la figura que sigue tenemos la representación gráfica del hecho.

La excitación pulso es hoy en día, muy empleada, porque permite operar los circuitos eléctricos denominados en Electrónica circuitos lógicos.



La excitación puede expresarse:

$$u = u(t) = U \text{ para } t_1 \leq t \leq t_2$$

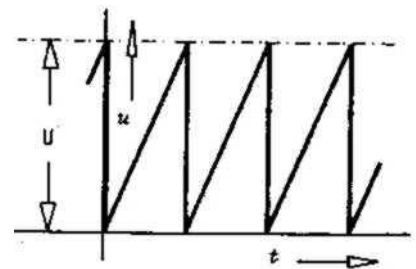
$$u = u(t) = 0 \text{ para } t < t_1 \text{ y } t > t_2$$

3.3.6. EXCITACIÓN DIENTE DE SIERRA O RAMPA

Otra forma muy corriente de excitación se puede apreciar en la figura que sigue. La tensión crece en forma lineal, para descender en forma brusca hasta cero, y reanudar el ciclo otra vez.

La expresión de este tipo de función es: $u(t) = a \cdot t$, siendo $a = \text{constante}$.

Este tipo de excitación se emplea en los circuitos llamados de barrido de osciloscopios.

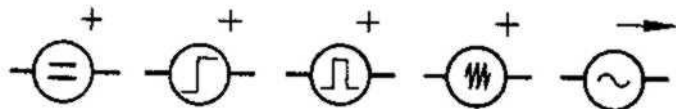


3.4. ELEMENTOS ACTIVOS DE LOS CIRCUITOS

Habremos de llamar así a todo elemento o mecanismo que aporte energía al circuito, bajo la forma de una señal. Esta energía proviene de un medio ajeno al mismo, y por lo tanto, el elemento activo es el encargado de introducir en el circuito, una energía que antes no tenía. Podemos decir que es equivalente hablar de elemento activo, generador o fuente.

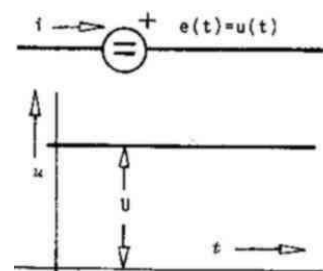
Para la representación de los elementos activos, se emplea un círculo, dentro del cual, un dibujo convencional nos indica que tipo de excitación contiene.

En la figura tenemos lo dicho, el primer dibujo corresponde a una fuente de corriente continua, el segundo a un escalón, el tercero a un pulso, el cuarto un diente de sierra y el último, una tensión alterna sinusoidal.



3.4.1. FUENTE DE TENSIÓN PERFECTA

Es un elemento que suministra tensión en forma invariable, sin resultar influenciado por la corriente que lo atraviesa. La tensión $u = U$ permanece invariable cualquiera sea la corriente.

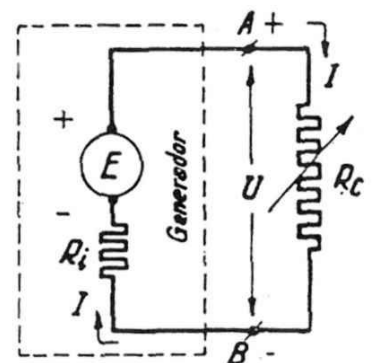


3.4.2. FUENTE DE TENSION REAL

Toda fuente de tensión real o generador realizable en la práctica tiene **interiormente** una cierta resistencia o una cierta impedancia, ya sea que tratemos circuitos excitados con corriente continua o alterna, respectivamente.

Un generador es una máquina, aparato o sistema, que recibiendo energía de una fuente dada, se ocupa de transformarla en energía eléctrica que es entregada a un circuito. Su función es entonces conferir a las cargas eléctricas la energía necesaria para que éstas puedan desplazarse por el circuito. Esta propiedad se pone de manifiesto por medio de la magnitud conocida como "**fuerza electromotriz**", que se abrevia f.e.m. y se señala con la letra **E**.

Todo generador puede representarse por una **fuerza electromotriz "E"** y por una **resistencia interior "R_i"** que manifiesta el paso de corriente por su interior, las cuales no existen en forma separada, sino en forma conjunta.



A continuación consideremos un generador de tensión continua que se caracterizará por su fuerza electromotriz E , que tendrá como valor instantáneo: E . El mismo generador presenta al paso de la corriente una resistencia interior R_i .

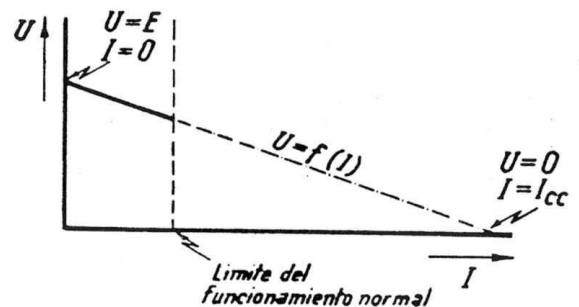
Si aplicamos la 2ª Ley de Kirchhoff al circuito de la figura formado por el generador de terminales A y B y la carga R_c que representa el consumo, podemos escribir:

$E = R_i I + R_c I$; por la Ley de Ohm se cumple: $U = R_c I$. Por lo tanto podemos escribir: $U = E - R_i I$, donde:

- ✓ $R_i I$ = se llama caída interna de tensión, siendo R_i la resistencia interna del generador, se la suele indicar como ΔU_G
- ✓ U = se denomina tensión en bornes del generador

En la figura que sigue representamos la expresión de la tensión en función de la corriente donde se distinguen dos puntos importantes, a saber:

- Cuando $I = 0$ la tensión $U = E$ y se denomina tensión a vacío " U_0 "
- Cuando $U = 0$ la corriente se denomina corriente de cortocircuito I_{cc} , donde $I_{cc} = \frac{E}{R_i}$



Todos los generadores importantes tienen mecanismos mediante los cuales se logra que $E = f(I)$, de tal modo que dentro de ciertos límites, considerados como los estados normales de funcionamiento, lejanos siempre a I_{cc} , la tensión permanece constante.

3.5. ELEMENTOS PASIVOS DE LOS CIRCUITOS

Un elemento pasivo es todo aquel que sustrae energía del circuito, para transformarla o acumularla.

Hay tres tipos básicos de circuitos pasivos, que estudiaremos a continuación, aplicando conocimientos de la Física.

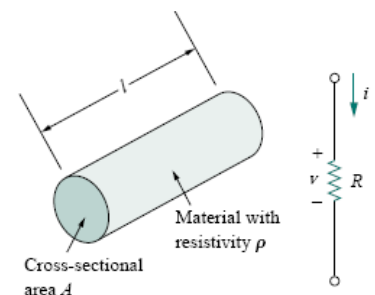
Para representar los distintos elementos se utilizan símbolos normalizados, establecidos por la Norma IRAM 2010, siendo una tendencia en el mundo el adoptar los símbolos establecidos por las normas I.E.C. (Internacional Electrotechnical Comisión)

3.5.1. RESISTORES PUROS

Son componentes de circuitos que se caracterizan por presentar solamente resistencia óhmica de valor " R "

En la figura podemos observar el esquema de un resistor y el símbolo de una resistencia utilizado en los circuitos.

En las figuras que siguen podemos apreciar distintos tipos de resistores que se utilizan en la técnica.



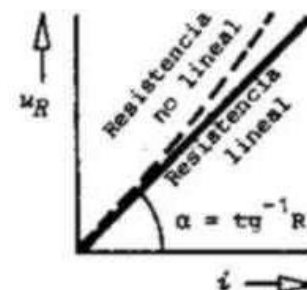


Si a un resistor de resistencia óhmica “R” le aplicamos una tensión $u_R(t)$ función del tiempo resulta que la corriente instantánea que circulará aplicando la Ley de Ohm valdrá:

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

En la figura puede observarse la representación de la variación de la tensión y la corriente, para el caso en que el resistor tenga características lineales.

Puede observarse que en caso de que el valor de la resistencia que caracteriza al resistor, no sea un valor constante la curva se apartará de la recta, siguiendo la ley de variación de la resistencia, estaremos en presencia de un resistor NO LINEAL.



Sabemos por Física que la **energía desarrollada en un circuito eléctrico**, sometido a tensión e intensidad variables, se expresa por: $A_R = \int_0^t u_R i dt = \int_0^t R i^2 dt$ [1]

Si resolvemos la expresión [1] y recordamos la definición de valor eficaz resulta:

$$A_R = R I^2 t = \frac{U^2}{R} t, \text{ donde la energía se mide en Joule [J]}$$

La expresión [1] pone de manifiesto que:

- **La energía es finita y positiva**
- **La energía eléctrica en un resistor de transforma en calor, luego se trata de un fenómeno irreversible**

Debido a que por definición la potencia es la energía por unidad de tiempo resulta:

$$p_r = \frac{dA_R}{dt} = R \cdot i^2 = u_R i, \text{ donde la potencia se mide en Watts [W]}$$

• RESISTENCIA R

La **resistencia “R”** de un resistor es la cantidad que cuantifica la mayor o menor **oposición** que manifiesta este elemento **al paso de la corriente** y desde el punto de vista energético es el número que manifiesta la **posibilidad** que tiene un resistor en **disipar la energía en forma irreversible**.

La resistencia de un conductor se calcula por medio de la expresión:

$$R = \rho \frac{l}{S} [\Omega]$$

donde ρ se denomina resistividad y es la inversa de la conductancia específica σ . Para el cobre el valor de la resistividad vale: $\rho_{Cu} = 0,018 [\Omega \cdot \text{mm}^2 / \text{m}]$

La resistencia de un conductor calculada por medio de la expresión formulada anteriormente se denomina “**resistencia óhmica o resistencia en corriente continua**”

Cuando un resistor es recorrido por **una corriente alterna** la resistencia R varía su valor debido al denominado efecto pelicular por lo que la resistencia R se calculará por la expresión:

$$R_{CA} = k \rho \frac{l}{S} \quad \text{donde } k > 1 \text{ y depende :}$$

* **de la frecuencia**

* **de la forma geométrica del conductor**

La resistencia que ofrece un conductor al paso de la corriente alterna, es superior a la que presenta ese mismo conductor si deja pasar una corriente continua.

La resistencia es también función de la temperatura, variando según la siguiente expresión:

$$R_t = R_{20} [1 + \alpha (t - 20)] \quad \text{donde :}$$

R_t = resistencia a la temperatura t

R_{20} = resistencia a 20 °C

α = coeficiente de temperatura del material conductor

t = temperatura de servicio en °C

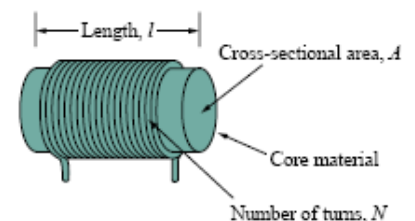
3.5.2. INDUCTORES PUROS

Son componentes de circuitos que solo presentan **inductancia (o autoinducción) de valor L** .

Un inductor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo magnético.

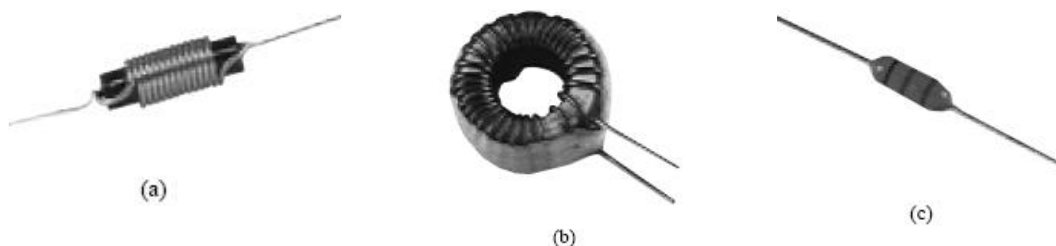
Son utilizados en fuentes de energía, transformadores, radio, televisión y motores eléctricos.

Todo conductor recorrido por una corriente eléctrica tiene propiedades inductivas y pueden ser utilizadas en un inductor. Prácticamente un inductor está formado por una bobina cilíndrica con muchas vueltas de alambre conductor, como mostramos en la figura.



Un inductor consiste en una bobina de alambre conductor

En la figura que sigue podemos apreciar distintos tipos de inductores que se utilizan en la técnica. En (a) se trata de un inductor tipo solenoide; en (b) un inductor toroidal; en (c) un inductor tipo cerámico.



También los inductores se presentan como un arrollamiento o bobinado sobre un núcleo de material magnético, como puede verse en la figura.

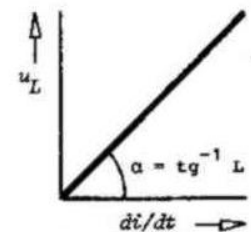
Cuando una corriente atraviesa una inductancia se produce un campo magnético asociado a ella y si la corriente es variable el campo también es variable e induce en la misma inductancia una “**fuerza electromotriz**” que se denomina “**fuerza electromotriz de autoinducción**”

Por Física sabemos que: $e = -L \frac{di}{dt} = -u_L$ donde u_L es la tensión aplicada. L se mide en Henry [H]

La corriente i valdrá:

$$di = \frac{1}{L} u_L dt \quad [a] \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt + i(t_0)$$

En la figura representamos la relación entre la tensión aplicada y la derivada de la corriente que circula, es decir la expresión [a], donde podemos apreciar las características lineales que presenta la inductancia L , estaremos entonces en presencia de un inductor lineal.



Por Física sabemos que la **potencia desarrollada por un sistema** puede expresarse como el **producto de la corriente por la tensión aplicada**, y la **energía**, para un cierto período de tiempo, **por medio de la integración de dicha potencia**.

$A_L = \int_0^t u_L i dt = \int_0^t (L \frac{di}{dt}) i dt = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$, se mide en Joule [J] si la autoinducción está en Henry [H] y la corriente en Amper [A]

De la expresión de la energía desarrollada en una autoinducción podemos decir que:

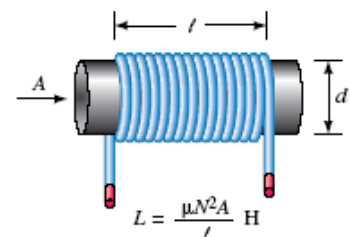
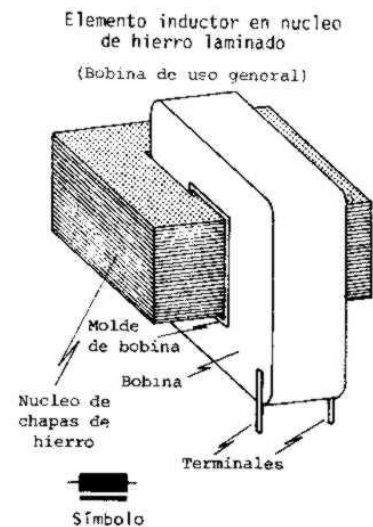
- **Depende del valor de la corriente “i” es decir aplicando corriente alterna a un inductor puro la energía en el mismo fluctúa siguiendo al cuadrado de la corriente.**
- **La energía no se transforma sino que se “ACUMULA” cuando la corriente crece y se libera cuando la corriente vuelve a cero.**
- **La energía en un inductor se almacena a través del campo magnético, pero no se transforma.**

✓ **INDUCTANCIA “L”**

Es función de la geometría del inductor y de los materiales con que este hecho.

El valor de L será: $u_L = L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi}{dt}$, siendo N el número de espiras (si se trata de una bobina) y ϕ el flujo total abrazado por las N espiras.

Podemos escribir: $L = N \frac{d\phi}{di} = N \frac{\phi}{i} = \frac{\Lambda}{i}$ donde $\Lambda = N \phi$ es el flujo concatenado o



Aplicando la Ley de Hopkinson: $\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{Ni}{\mu \mu_0 S_{Fe}}$ y reemplazando:

$$L = \frac{N^2 \mu \mu_0 A_{Fe}}{l_{Fe}}$$

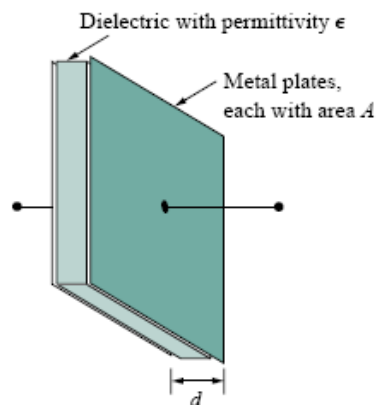
La inductancia es una propiedad que presenta un inductor manifestando la oposición al cambio del flujo de corriente que lo atraviesa, siendo medida en Henry [H]

3.5.3. CAPACITORES PUROS

Son componentes de circuitos que solo presentan capacidad (o capacitancia) **de valor C**.

Un capacitor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo eléctrico. Junto con los resistores, los capacitores son los componentes eléctricos más comunes. Los capacitores son extensamente utilizados en electrónica, comunicaciones, computadoras y sistemas de potencia.

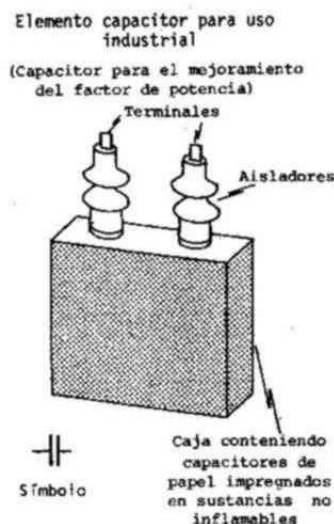
Un capacitor está típicamente construido como se describe en la figura.



Un capacitor consiste en dos placas conductoras separadas por un material aislante (o dieléctrico)

En muchas aplicaciones de la técnica, las placas pueden ser de aluminio, mientras que el dieléctrico puede ser aire, material cerámico, papel o mica.

En las figuras que siguen podemos apreciar distintos tipos de resistores que se utilizan en la técnica.



Cuando se aplica una **tensión variable** a las placas de un capacitor se produce entre ellas un campo eléctrico E, como la tensión es variable el campo es variable y la **cantidad de electricidad o carga eléctrica** acumulada en el capacitor vale: $q = C u_c$, donde:

- C representa la capacidad y se mide en Farad [F]
- q la cantidad de electricidad en Coulomb [C]
- u_c es la tensión aplicada en Volt [V]

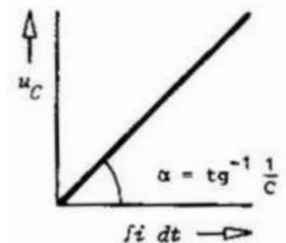
La capacidad es el cociente entre la carga de una de las placas de un capacitor y el voltaje aplicado entre las dos placas, medida en Farad (1 F = 1 C / 1 V)

La tensión en función de la corriente vale:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow du_c = \frac{1}{C} i dt \Rightarrow u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + u_c(t_0) \quad [b]$$

donde: $u_c(t_0) = \frac{q(t_0)}{C}$

En la figura representamos la relación entre la tensión aplicada y la integral de la corriente que circula, es decir la expresión [b], donde podemos apreciar las características lineales que presenta la capacidad C, estaremos entonces en presencia de un capacitor lineal.



Al igual que en el inductor la **energía acumulada en el capacitor** valdrá:

$$A_c = \int_0^t u_c i dt = \int_0^t (C \frac{du_c}{dt}) u_c dt = \int_0^{u_c} C u_c du = \frac{1}{2} C u_c^2, \text{ se mide en Joule [J] si la capacidad está en Farad [F] y la tensión en Volt [V]}$$

De la expresión de la energía acumulada en una capacidad podemos decir que:

- **Depende del valor de la tensión “u” aplicada, es decir aplicando tensión alterna a un capacitor puro la energía en el mismo fluctúa siguiendo al cuadrado de la tensión aplicada.**
- **La energía no se transforma sino que se “ACUMULA” cuando la tensión crece y se libera cuando la tensión vuelve a cero.**
- **La energía en un capacitor se almacena a través del campo eléctrico, pero no se transforma.**

✓ **CAPACIDAD “C”**

Es una función de la geometría del capacitor y de los materiales con que este hecho. Consideremos un capacitor de placas paralelas. La carga eléctrica puede ser expresada: $q = S D = \epsilon \epsilon_0 S E$ y como el campo el campo eléctrico puede expresarse

como: $E = \frac{u_c}{l}$, la capacidad resultará:

$$q = \epsilon \epsilon_0 S \frac{u_c}{l} \quad \text{y dado que } C = \frac{q}{u_c} \Rightarrow C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l}$$

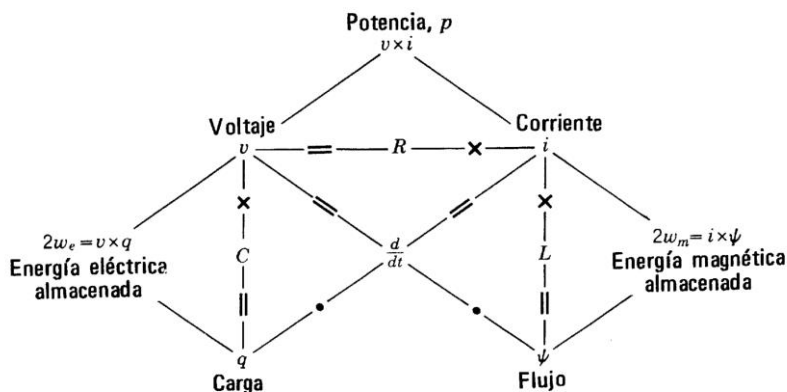
Donde:

S: es la superficie de la placa del capacitor plano, l: es la distancia entre las mismas.

ϵ_0 = es la constante dieléctrica del vacío.

ϵ = es la constante dieléctrica relativa o referida a la del vacío.

En el **grafico** siguiente ponemos de manifiesto las **relaciones** encontradas entre la **corriente, el voltaje, la potencia y la energía**, de acuerdo a los **distintos elementos** que constituyen los circuitos elementales.



Resumen de relaciones tensión – corriente para los distintos elementos pasivos (R, L y C)

| Parámetro | Relación básica | Relaciones voltaje corriente | Energía |
|------------------------|-----------------|---|-------------------------------------|
| R $G = \frac{1}{R}$ | $v = Ri$ | $v_R = Ri_R$ $i_R = Gv_R$ | $w_R = \int_{-\infty}^t v_R i_R dt$ |
| L (o M) | $\psi = Li$ | $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L dt$ | $w_L = \frac{1}{2} Li^2$ |
| C $D = \frac{1}{C}$ | $q = Cv$ | $v_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$ $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ | $w_C = \frac{1}{2} Cv^2$ |

3.6. AGRUPAMIENTO DE ELEMENTOS

Los diversos elementos que conforman los circuitos eléctricos – sean activos o pasivos – recién estudiados son susceptibles de ser agrupados o conectados en diversas formas, para lograr configuraciones más sencillas o más convenientes. Estudiaremos a continuación esas formas de conexión.

3.6.1. AGRUPAMIENTO DE ELEMENTOS ACTIVOS

3.6.1. 1. AGRUPAMIENTO EN SERIE

Si varios generadores son conectados uno a continuación del otro tal como se observa en la figura que sigue, diremos que los mismos están en serie. Evidentemente las fuerzas electromotrices quedan en serie, del mismo modo que las impedancias interiores.



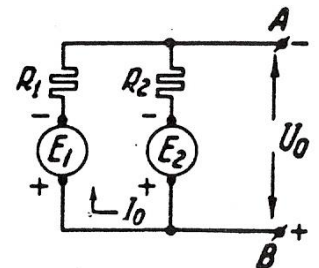
Por lo tanto, el conjunto de varios generadores en serie presenta para su uso, las mismas características que un solo generador de las siguientes cualidades:

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} E_i \quad R = \sum_{i=1}^{i=n} R_i$$

3.6.1. 2. AGRUPAMIENTO EN PARALELO

Es posible agrupar a los generadores en “paralelo”, como se ilustra en la figura que sigue, empalmando los terminales de igual polaridad. En la figura solo se han considerado dos generadores, por simplicidad y por ser muy ilustrativo el caso.

Es evidente que este tipo de conexión debe hacerse con generadores de iguales características. Por ahora admitamos que todos los generadores que se conectan en paralelo tienen la misma fuerza electromotriz pudiéndose escribir: $U_0 = E_1 = E_2$



En lo referente a la RESISTENCIA interna, siendo iguales el valor de ambas en este

caso, el resultado del conjunto será la mitad, es decir: $R = \frac{1}{2} R_1 = \frac{1}{2} R_2$

Puede darse el caso de que exista una corriente de circulación I_0 , como se indica en la figura, que circula entre los generadores. Esta corriente no es de utilidad alguna para el circuito exterior, por lo que no es deseable. La condición necesaria para que la corriente de circulación sea nula es que se las tensiones sean iguales y opuestas, luego para conectar dos generadores en paralelo los mismos deben ser de iguales características, como ya se mencionó.

3.6.2. AGRUPAMIENTO DE ELEMENTOS PASIVOS

Los resistores, inductores y capacitores pueden agruparse en diversas formas. Veremos tres formas básicas de conexión a saber: serie, paralelo y estrella – triángulo.

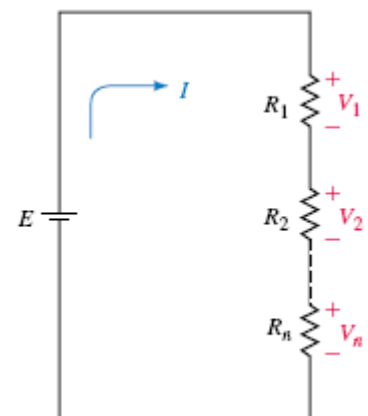
3.6.2.1. AGRUPAMIENTO EN SERIE

En la figura se representa la conexión de resistores **EN SERIE**, cuyas resistencias tienen valores R_1, R_2, \dots, R_n . Nos interesa encontrar la resistencia equivalente que denominaremos R_{eq}

La corriente que circula por los resistores es la misma, luego podemos escribir: $I = I_1 = I_2 = \dots = I_n$

La tensión aplicada al conjunto, resulta por aplicación de la 2ª Ley de Kirchhoff:

$$E = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = I (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

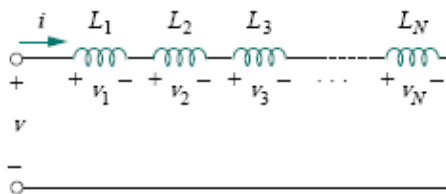


Luego la resistencia total del conjunto resulta:

$$R_{eq} = \frac{E}{I} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^{i=n} R_i$$

La resistencia equivalente de resistores en serie es la suma de las resistencias de los resistores individuales

Si en lugar de resistores, consideramos “N” **inductores conectados en serie**, como se muestra en la figura, la corriente que los atraviesa es la misma, luego aplicando la 2º Ley de Kirchoff al lazo resultará:

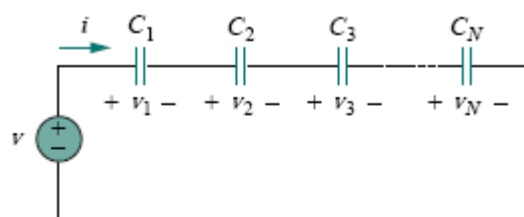


$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{k=N} L_k \right) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

Donde: $L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$

La inductancia equivalente de inductores conectados en serie es la suma de las inductancias individuales.

Si ahora, consideramos capacitores conectados en serie, como se muestra en la figura, y aplicamos la 2º Ley de Kirchoff, resultará:



$$v = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i dt + v_2(t_0) + \dots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i dt + v_N(t_0) =$$

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i dt + v(t_0) = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$$

Donde: $\frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right)$

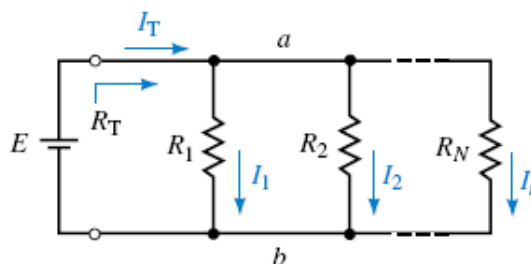
La capacidad equivalente de capacitores conectados en serie es la inversa de la suma de las inversas de las capacidades individuales.

3.6.2.2. AGRUPAMIENTO EN PARALELO

Las resistencias también pueden conectarse en paralelo, como puede observarse en la figura.

En este caso la tensión U aplicada a cada una de ellas es la aplicada al conjunto, luego se cumple: $U_1 = U_2 = \dots = U_n = E$

La corriente tomada por el conjunto, será la suma de las corrientes parciales, es decir:



$$I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \dots + \frac{E}{R_n} = E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

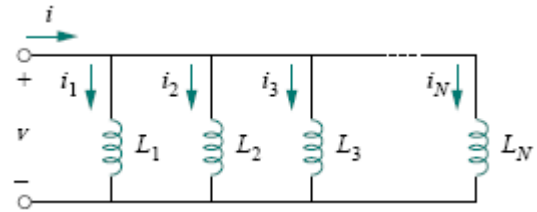
La resistencia del conjunto vale:

$$\frac{1}{R_p} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \quad \text{luego} \quad R_p = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)}$$

La resistencia equivalente de resistores conectados en paralelo es la inversa de la suma de las inversas de las resistencias individuales

Con idéntico razonamiento, si ahora consideramos inductores en paralelo resultará que la inductancia equivalente de “N” inductores en paralelo resulta:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right)$$



La inductancia equivalente de inductores conectados en paralelo es la inversa de la suma de las inversas de las inductancias individuales.

Si ahora consideramos “N” capacitores conectados en paralelo, como vemos en la figura.

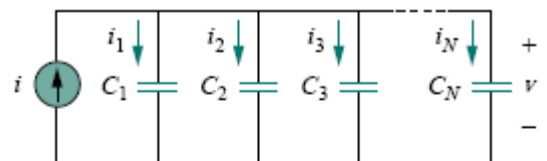
La corriente total será la suma de las corrientes de cada capacitor, luego:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N. \text{ Dado que: } i_k = C_k \frac{dv}{dt},$$

entonces:

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{k=N} C_k \right) \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$

Donde:
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_{k=1}^{k=N} C_k$$



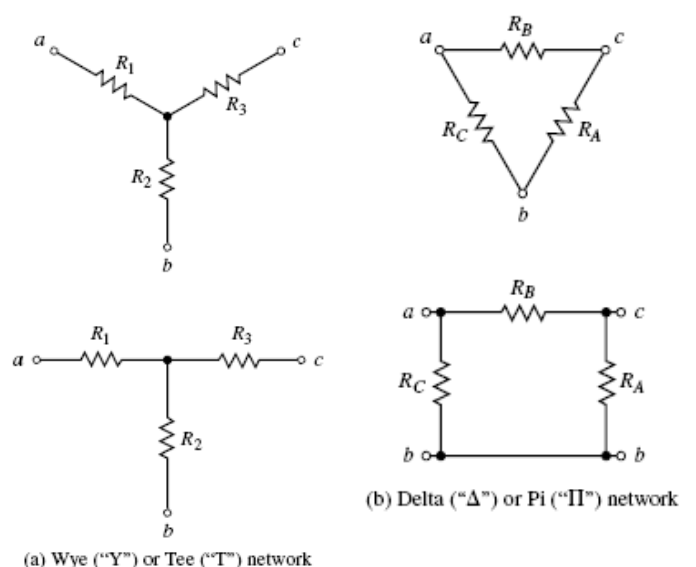
La capacidad equivalente de capacitores en serie es la suma de las capacidades de los capacitores individuales

3.6.2.3. AGRUPAMIENTO EN ESTRELLA Y EN TRIANGULO

En muchos problemas prácticos, sobre todo cuando se traten de circuitos trifásicos, como veremos más adelante, las cargas suelen adoptar dos tipos de conexiones denominadas:

- ✓ **conexión en estrella “Y”**
- ✓ **conexión en triángulo “Δ”**

En las figuras podemos observar este tipo de conexiones, representando una configuración de tres terminales o bien de cuatro terminales, constituyendo un cuadripolo.



Obsérvese que en la figura, se representan una carga conectada en estrella, por su parecido a la letra T, también se llama conexión T, y una carga conectada en triángulo que se parece a la letra griega π , por lo que se la llama conexión π .

En la resolución de circuitos, es corriente tener que transformar un triángulo en una estrella o viceversa.

Para ello se recurre a un grupo de ecuaciones que siguen, que utilizaremos sin demostración, cuando sea necesario plantear una transformación Y - Δ o Δ - Y para resolver distintos tipos de problemas.

Admitamos, sin demostración, que para transformar un triángulo en la estrella equivalente, las ecuaciones serán:

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

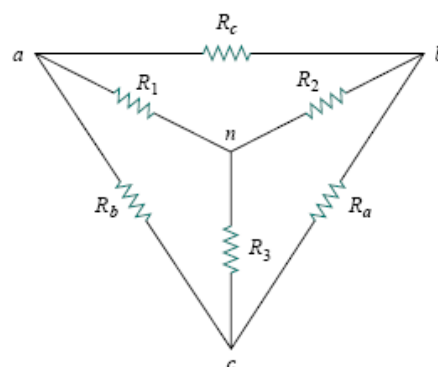
$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

Para transformar una estrella en el triángulo equivalente, las ecuaciones serán:

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$



Glf/2015